Számelmélet

1) Az 52941 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben.
   a) Az 52941 számmal együtt hány ötjegyű számot kapunk? (2 pont)
   b) Ezen számok közül hány osztható 12-vel? (6 pont)
   c) Bizonyítsa be, hogy e számok egyike sem négyzetszám! (4 pont)

2)
   a) Hány olyan tízjegyű pozitív szám van, amelynek minden számjegye a $\{0;8\}$ halmaz eleme? (3 pont)
   b) Írja fel 45-nek azt a legkisebb pozitív többszörösét, amely csak a 0 és 8-as számjegyeket tartalmazza! (7 pont)

3) Két valós szám összege 29. Ha az egyikből elveszünk 15-öt, a másikhoz pedig hozzáadunk 15-öt, az így kapott két szám szorzata éppen ötszöröse lesz az eredeti két szám szorzatának. Melyik lehet ez a két szám? (13 pont)

4) Melyek azok a tízes számrendszerben kétjegyű természetes számok, amelyekben a számjegyek számtani és harmonikus közepének a különbsége 1? (16 pont)

5)
   a) Egy téglalapot 720 darab egybevágó kis téglalapra daraboltunk szét. A kis téglalapok oldalai közül az egyik 1 cm-rel hosszabb, mint a másik. Hány cm hosszúak egy-egy kis téglalap oldalai, ha a nagy téglalap területe 2025 cm²? (7 pont)
   b) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből összesen 720 olyan hatjegyű szám képezhető, melynek számjegyei között nincsenek egyenlők. Ezek között hány 12-vel osztható van. (5 pont)

6) Adott síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $y = 3x^2 - x^3$ egyenletű görbe.
   a) Igazolja, hogy ha $x \in]0;3[$, akkor $y > 0$. (4 pont)
   b) Írja fel a görbe 3 abszcisszájú pontjában húzható érintőjének egyenletét! (abszcissza: első koordináta) (5 pont)
   c) Számítsa ki annak a síkidomnak a területét, amelyet a görbe első síknegyedbe eső íve és az x tengely fog közre! (5 pont)

7)
   a) Ha $a \mid b$ igaz, akkor $a \mid b^2$ is teljesül (a és b pozitív egész számok). Fogalmazza meg a fenti (igaz) állítás megfordítását, és állapítsa meg a megfordítás logikai értékét is! Válaszát indokolja! ($a \mid b$ azt jelenti, hogy az a egész szám osztója a b egész számnak.) (3 pont)
   b) Hány olyan n pozitív egész szám van, amelyhez létezik olyan p (pozitív) prímszám, amelyre az $n^2 - pn$ különbség is egy (pozitív) prímszámmal egyenlő? (7 pont)

   Egy lapra 10 pontot rajzoltunk, majd ezeket megszámoztuk 1-től 10-ig. Ezután minden egyes pontot egy-egy vonallal „összekötünk" a lapon szereplő összes olyan ponttal, amelyhez írt szám a kiválasztott ponthoz írt számnak osztója. (Például azt a pontot, amelyhez a 6-ot írtuk, összekötöttük mind a négy ponttal, amelyhez a 6 valamelyik osztóját írtuk.)
   c) Igazolja, hogy az így kapott 10 csúcsú gráf nem egyszerű gráf! (2 pont)
   d) Igazolja, hogy a gráf éleinek száma páratlan! (4 pont)

8) A pozitív páratlan számokat „háromszög” alakban rendezzük el a következők szerint: az első oszlopba írjuk az első páratlan számot, a második oszlopba a következő kettőt, a harmadik oszlopba a következő hármat, és így tovább. Például az ötödik oszlop negyedik helyén a 27 áll (lásd az ábrát is).

1	3	7	13	21
	5	9	15	23
		11	17	25
			19	27
				29

a) Hányadik oszlop hányadik helyén áll a 99? (3 pont)

b) Határozza meg a 2017. oszlopban álló első számot! (4 pont)

c) Igazolja, hogy az n-edik oszlopban álló számok összege $n^3\left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$. (9 pont)

9) a) Határozza meg a c számjegy lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy $\overline{lc28}$ nem osztható 6-tal, $\overline{93c6}$ nem osztható 36-tal, $\overline{c3c5}$ pedig nem osztható 15-tel! ($\overline{pqrs}$ azt a négyjegyű számot jelöli, melynek első számjegye p, további számjegyei pedig rendre q, r, és s.) (7 pont)

b) Igazolja, hogy nincs olyan n pozitív egész szám, amelyre $4^n + 6n - 1$ osztható 8-cal! (2 pont)

c) Igazolja (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy $4^n + 6n - 1$ minden n pozitív egész szám esetén osztható 9-cel! (7 pont)

10) Egy adatsokaság hét pozitív egész számból áll. Az adatsokaságnak két módusza van, a 71 és a 75. Az adatsokaság mediánja 72, az átlaga 73, a terjedelme pedig 7.

a) Határozza meg a hét számot! (7 pont)

A 72-nek és az n pozitív egész számnak a legkisebb közös többszöröse 27720.

b) Határozza meg az n lehetséges értékeinek számát, és adja meg az n legkisebb lehetséges értékét! (6 pont)

11)

a) Egy mértani sorozat negyedik tagja 12, a kilencedik tagja 384. Számítsa ki a sorozat első hat tagjának az átlagát, és az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését! (6 pont)

b) Hány olyan pozitív szám van, amelynek összege és szorzata is 12? (7 pont)

12) A p, q, r pozitív számok összege 180. Továbbá tudjuk, hogy $p : q = 7 : 8$ és $r : p = 5 : 3$.

a) Határozza meg ezeket a számokat! (6 pont)

A H halmaz az első 90 pozitív egész szám halmaza. H-ból véletlenszerűen kiválasztunk két különböző számot.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a két kiválasztott szám egy derékszögű háromszög (fokban mért) valamelyik két szöge! (7 pont)

13) a) Hány olyan 90-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amely a 2, a 3 és az 5 közül pontosan az egyikkel osztható? (6 pont)

Az ötöslottó-játékban az első 90 pozitív egész számból kell öt különbözőt megjelölni. A sorsoláson öt (különböző) nyerőszámot húznak ki. (Sem a megjelölés, sem a kihúzás sorrendje nem számít.)
Kati a 7, 9, 14, 64, 68 számokat jelölte meg. A sorsoláson az első három kihúzott nyerőszám a 7, a 9 és a 14 volt. Kati úgy gondolja, hogy most nagy esélye van legalább négy találatot elérni.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a hátralévő két nyerőszám közül Kati legalább az egyiket eltalálja! (6 pont)

Az egyik játékhéten összesen 3 222 831 lottószelvényt küldtek játékba a játékosok. Az alábbi táblázat mutatja a nyertes szelvények számát és nyereményét (2-nél kevesebb találattal nem lehet nyerni).

Találatok száma	Nyertes szelvények száma	Nyeremény (Ft/nyertes szelvény)
5	0	0
4	17	3 113 255
3	1617	34 915
2	62 757	1970

c) Számítsa ki, hogy mennyi volt a játékosok egy lottószelvényre jutó átlagos vesztesége ezen a héten, ha a játékba küldött szelvények egységára 250 Ft! (4 pont)

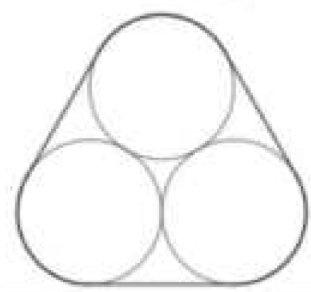
14) Ha András az asztalra ejti a pingponglabdáját, akkor a labda az ejtési magasság kb. 84%-ára pattan vissza. Ezután tovább pattog úgy, hogy minden asztalra érkezés után az előző felpattanás magasságának 84%-áig emelkedik fel.

a) András egy alkalommal (az asztal lapjától mérve) 1 méter magasságból ejtette az asztalra a pingponglabdát. Mekkora utat tesz meg összesen a pingponglabda az első asztalra érkezésétől a tizenötödikig? (Feltételezzük, hogy a labda csak függőleges irányban mozog, a vízszintes irányú elmozdulás elhanyagolható.) (4 pont)

András azt állítja, hogy az összes pingponglabdájának száma 6-tal osztva 2 maradékot, 15-tel osztva pedig 1 maradékot ad.

b) Mutassa meg, hogy András állítása hamis! (3 pont)

Dóri olyan pingponglabda-készletet vásárolt, amelynek dobozába három egyforma labda – az ábrán látható elrendezésben – szorosan belefér. A doboz hengeres test, melynek alaplapját három egybevágó körív és három egyenlő hosszúságú szakasz határolja. (Az ábrán a dobozt felülnézetből látjuk.)



c) A doboz térfogatának hány százalékát tölti ki a három pingponglabda, ha a labdák átmérője 40 mm? (A doboz falvastagsága elhanyagolható.) (7 pont)

15) a) Hány olyan pozitív háromjegyű szám van a tízes számrendszerben, amely a 8 és a 9 számok közül legalább az egyikkel osztható? (7 pont)

b) A 8-cas számrendszerben háromjegyű pozitív egész számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott szám a 9-ces számrendszerben is háromjegyű? (7 pont)

16) Az ókori egyiptomiak az egyenlő szárú háromszög területét (közelítő módszerrel) úgy számolták ki, hogy az alap és a szár szorzatának a felét vették.

a) Egy egyenlő szárú háromszög alapja 18 cm hosszú. Mekkora lehet a szára, ha az ókori egyiptomiak módszere e háromszög valódi területét 25%-nál kisebb hibával adja meg? (9 pont)

Az ókori Egyiptom matematikájában a számok négyzetének is jelentős szerep jutott.

b) Hány olyan 1000-nél kisebb pozitív egész szám van, amellyel az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ számot megszorozva négyzetszámot kapunk? (7 pont)